π und e

Zwei besondere Zahlen für Schüler und Lehrer

von

Alexander Wynands, Königswinter

Zusammenfassung: Die Zahl π gehört zum mathematischen Bildungskanon der Sekundarstufe (Sek.) I. Der Zugang zu e erfolgt im Mathematikunterricht (MU) der Sek. II. Die Einführung der beiden Zahlen sollten neben historischen Anmerkungen – z.B. zu Archimedes, Euler, Klein – didaktische Aspekte beachten:

1. Definitionen erfolgen schüler-, problem- und handlungsorientiert.
2. Bei der Approximation von π können Schüler der Sek. I Konvergenzprobleme „erleben", die leistungsstarke Schüler der Sek. II beweisen können.
3. Aus mathematik-didaktischer Sicht ist m.E. der „Eulersche Weg" zu e, exp(x) und ln(x) dem „Klein´schen Weg" - über die Integration der Hyperbel - vorzuziehen.
4. Lehramtskandidaten für den MU der Sek. II sollte ein Beweis der Irrationalität von e und der „schöne" Zusammenhang von π und e bekannt sein.

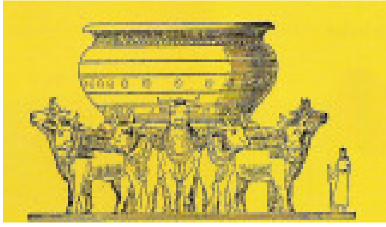
1 Zur Definition und Historie der Kreiszahl π

In der Schule kann π über den Kreisumfang oder die Kreisfläche definiert werden. Wegen des experimentell leichteren Zugangs über die Längenmessung wird meistens die Definition (1) gewählt. Die Definitionsmöglichkeiten (2) und (3) sind dem „theorieorientierten" Studium der Mathematik im 1. Semester angemessen.

(1) π ist das Verhältnis von Umfang zu Durchmesser eines Kreises.

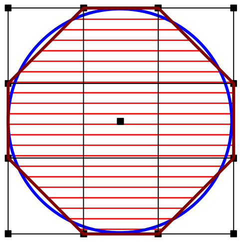
(2) $\frac{\pi}{4} := \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ (3) $\pi := 4 \cdot \arctan(1)$

Die Bibel erzählt im Buch der Könige von König Salomons Tempelbau in Jerusalem um ca. 1000 v.Chr. Man erfährt dabei u.a., dass damals ein „ehernes Meer" als Reinigungsbecken aus Bronze gebaut wurde.



“Und er machte das Meer, gegossen, von einem Rand zum andern 10 Ellen weit rundherum und fünf Ellen hoch, und eine Schnur von 30 Ellen war das Maß ringsherum“, 1.Kön. 7,23 der Lutherbibel (1984).

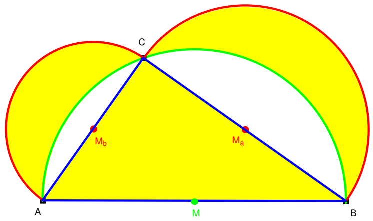
Dem Text kann man die Erkenntnis entnehmen, dass der Radius (5 Ellen) eines Kreises gleich der Sehnenlänge des ihm einbeschriebenen regelmäßigen Sechsecks ist, und das Verhältnis von Kreisumfang zu Kreisdurchmesser mindestens 3 ist.



Im Papyrus Rhind (ca. 1800 v.Chr.) steht ein Näherungswert $\pi \approx (16/9)^2$. Eine mögliche Erklärung hierfür liefert das nebenstehende Bild: Ein Kreis (mit d = 2r) wird in 9 gleiche Quadrate zerlegt und durch 7 von diesen 9 Teilquadraten angenähert. Es gilt

$$A \approx (7/9)(2r)^2 = (63/81)4r^2$$
$$\approx (64/81)4r^2 = (16/9 * d/2)^2.$$

Das Verhältnis π aus Kreisfläche und Radiusquadrat hat also die Näherungswerte $\frac{7}{9}\cdot 4 \approx 3{,}11$ bzw. $(\frac{16}{9})^2 \approx 3{,}16\cdot$

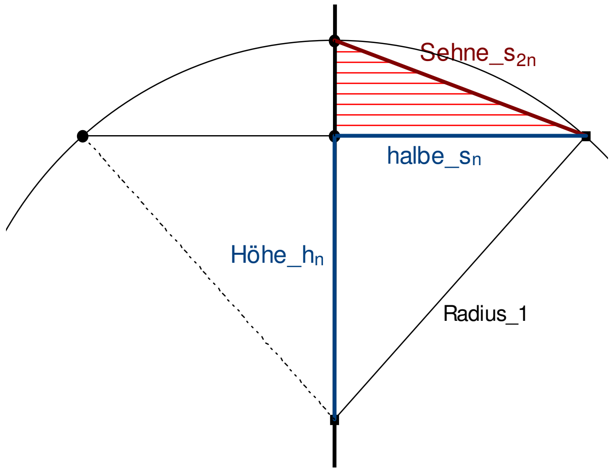


Hippokrates (5. Jh.v.Chr.) „quadrierte“ – mit dem Satz des Pythagoras (570 - 480 v.Chr.) - seine „Möndchen“ mit Erfolg: Im rechtwinkligen Dreieck sind die beiden Möndchen über den Katheten zusammen flächengleich mit dem Dreieck.

Warum sollte also die „Quadratur des Kreises“ nicht gelingen, d.h. die Konstruktion - mit Zirkel und Lineal, exakt und in endlich vielen Schritten - eines Quadrates, das flächengleich zu einem gegebenen Kreis ist? π als Flächenmaßzahl des Einheitskreises wäre dann in dem Sinne eine „klassisch“ konstruierbare Zahl auf dem Zahlenstrahl von der man heute mehr als 1 000 000 000 000 (1 Billionen) Dezimalziffern kennt.

Auf Archimedes (287 -212 v.Chr.) geht die Ausschöpfung (Exhaustion) des Kreises zurück mit regelmäßigen 6-, 12-, 24, … 96-Ecken von „innen und außen“. Kern der Methode sind (Rekursions-)Formeln zwischen den Sehnen der ein- (oder um-) beschriebenen n-Ecke und 2n-Ecke, die auf den Satz des Pythagoras zurückgreifen. Wir werden auf Archimedes gleich näher eingehen.

Für die Sehnen s_n und Höhen h_n eines n-Ecks im Einheitskreis gilt:



$$(\frac{s_n}{2})^2 + h_n^{\ 2} = 1, \quad s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^{\ 2}}} \quad = \frac{s_n}{\sqrt{2+\sqrt{4-s_n^{\ 2}}}}$$

(4)
$$h_{2n} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} h_n}$$

Umfang: $\frac{u_n}{2} \quad = n \cdot \frac{s_n}{2}$, Flächeninhalt: $A_n \quad = n \cdot \frac{s_n h_n}{2}$

Mit der Rekursionsformel für die Höhen h_{2n} entdeckte Vieta (1540 - 1603) ein unendliches Produkt für die Kreiszahl. Dies zeigt die Rechnung:

$$\frac{A_n}{A_{2n}} = h_n, \quad A_4 = 2, \quad h_4 = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

also gilt $\frac{A_4}{A_8}\frac{A_8}{A_{16}}\frac{A_{16}}{A_{32}}...\frac{A_n}{A_{2n}}...$ und deshalb ist

$$\frac{A_4}{A_{Kreis}} = \frac{2}{\pi} = h_4 h_8 h_{16} ....h_n..... \quad = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}...$$

Die Methoden von Archimedes und Vieta versteht jeder 9.-Klässler, der den Satz des Pythagoras kennt.

Wenn Schülern auch die folgenden Formeln „unbegreifbar“ erscheinen, so können die nachfolgenden „schönen“ Terme zumindest zur „Muster-Erkennung“ anregen, vielleicht sogar Konvergenz-Erfahrungen anbieten.

Wallis (1616 – 1703) $\frac{4}{\pi} = \frac{3\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{5\cdot 5}{4\cdot 6}\cdot\frac{7\cdot 7}{6\cdot 8}\cdot\frac{9\cdot 9}{8\cdot 10}\ldots$

Brauncker (1620-1684)

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cfrac{\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}}}}}$$

Gregory (1638 -1675) $\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots + \ldots\ldots.$

Euler (1707 – 1783) gelingt eine sehr schnelle Approximation - mit der arctan(x)-Reihe - und bietet eine neue Idee an: $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{\pi^2}{6}$.

Für weitergehende historische Anmerkungen sei z.B. verwiesen auf [Beckmann (1971)] und [Posamentier/Lehmann (2004)].

2 π im Mathematikunterricht

Im MU ergeben sich nun neben historischen Überlegungen noch ganz andere Fragen, z.B.: Welchen „Sinn oder Nutzen“ hat π für den Adressaten, womit kann man ihn motivieren? Welche Methode zur Hinführung und Verwendung ist geeignet? Wie kann man hierbei mathematische Gebiete (Geometrie – Analysis – Numerik – Stochastik, Algorithmik) miteinander vernetzen?

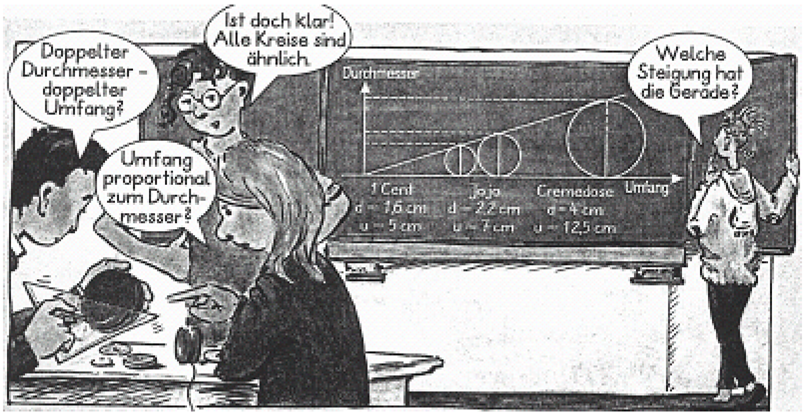
2.1 Einstieg in die Kreismessung

Die Frage nach der Größe von π und nach Formeln zur Kreisberechnung können in der 8. oder 9. Klasse eingeleitet werden z.B. durch „praktische“ Probleme oder durch Messen und Entdecken an kreisförmigen Objekten (Rädern, Dosen, Münzen,…), vgl. [Schröder/Wurl/Wynands (2007)], woraus die nachfolgenden Aufgaben und Abbildungen entnommen sind.

Wie wird bei einem Fahrrad das Tachometer programmiert?

Wie oft dreht sich ein kleines Rad bei einer Umdrehung des großen?

Wie oft passt der Dosendurchmesser auf die „Umfangslinie“?



Wie sieht der Graph der Zuordnung Umfang → Durchmesser aus?

Die Kreiszahl π wird gemäß Definition (1) erklärt und in der Umfangsformel $u = 2\pi r$ genutzt. Mit der präformalen „Tortenzerlegungs-Begründung“ – Zerlegung eines Kreises in sehr viele „Tortenstücke“, die anschließend zu einem „Fastrechteck“ mit der Länge $\frac{1}{2}u = \pi r$ und der Höhe r zusammengelegt werden - erhält man die Formel für den Flächeninhalt des Kreises $A_{Kreis} = \pi r^2$.

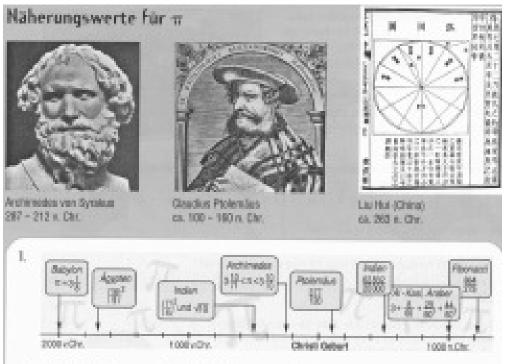
Bei den Übungen an formalen und sachorientierten Aufgaben ergeben sich u.a. folgende sinnvolle Fragen: Wie genau soll das Ergebnis sein? Wie viele Dezimalstellen von π braucht man? Wer kannte wann wie viele Stellen, wie berechnet man sie? Man vergleiche hierzu [Schröder/Wurl/Wynands (2007), 9. Klasse RS].

1. Wer kannte wann π wie genau?

2. Wie viele Dezimalstellen von 355/113 stimmen mit denen von π überein?

3. So berechnen manche Handwerker den Kreisumfang: „Durchmesser mal 3 plus 5%". Was meinst du dazu?

4. Was findest du unter dem Suchbegriff „Kreiszahl" im Internet?



$\pi \approx 3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974\ldots$

2.2 Berechnungen von Näherungswerten

Leistungsstärkeren Schülern kann mehr angeboten werden. Mit einer Tabellenkalkulation ist z.B. die Exhaustion nach Archimedes von jeglicher „numerischen Last" befreit und es können Konvergenzen und numerische Divergenzen (Instabile Verfahren) in Klasse 9 oder 10 erlebt werden. Im Analysisunterricht der Klasse 11 kann man auf solche Erfahrungen zurückgreifen und Begründungen / Beweise dazu liefern, vgl. auch [Blankenagel (1988)].

Kern der Methode ist die Rekursionsformel zwischen den Sehnen der einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecke und 2n-Ecke, vgl. Abschnitt 1. Durch Hinsehen auf die Näherungswerte für π entdeckt man erstaunliche Eigenschaften.

In der linken Tabelle überraschen die Werte bis n = 96 nicht. Wird n „sehr groß", sieht man die „numerische Konvergenz" der π-Folge gegen den sinnlosen Wert 0, weil die s-Werte als „0" zwischengespeichert werden. Man erlebt hier eine „Nullkatastrophe".

Näherungen mit

$s_6 = 1, \quad s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$

n (Eckenzahl)	Sehne s(n)	π-Näher. Pi(n)
6	1,00E+00	3,0000000
12	5,18E-01	3,1058285
24	2,61E-01	3,1326286
48	1,31E-01	3,1393502
96	6,54E-02	3,1410320
201.326.592	***2,98E-08***	***3,0000000***
402.653.184	***1,49E-08***	***3,0000000***
805.306.368	***0,00E+00***	***0,0000000***

Näherungen mit

$s_{2n} = s_n : \sqrt{2 + \sqrt{4 - s_n^2}}$

s(n)	Pi(n)	$\frac{Pi(2n) - Pi(n)}{Pi(n)}$	
1,00E+00	3,0000000000	. /.	k-Faktor
5,18E-01	3,1058285412	3,53E-02	. / .
2,61E-01	3,1326286133	8,63E-03	0,24461
1,31E-01	3,1393502030	2,15E-03	0,24866
6,54E-02	3,1410319509	5,36E-04	0,24967
3,12E-08	***3,1415926536***	***2,83E-16***	***1,00000***
1,56E-08	***3,1415926536***	***0,00E+00***	***0,00000***
7,80E-09	***3,1415926536***	***0,00E+00***	***#DIV/0!***

Mit der „numerisch stabilen“ Formel (rechte Tabelle) $s_{2n} = s_n : \sqrt{2 + \sqrt{4 - s_n^2}}$,
die algebraisch äquivalent zur Formel in der linken Tabelle ist, entdeckt man
1. schrittweise (fast) Halbierung der Sehnenlängen s_n,
2. stabile „numerische Konvergenz“ der π-Folge (bis 805 306 368-Eck),
3. „lineare“ Konvergenz mit einem Konvergenzfaktor k = 0,25 (vgl. letzte Spalte).

Die Beweise zu den Entdeckungen können in der Sek. II behandelt werden. Dabei geht man „spiralig vertiefend“ vor und vernetzt zugleich die Gebiete Geometrie, Algebra, Numerik, Algorithmik und Analysis. Beweise zu 1. und 2.

$$\left| \frac{s_n - s_{2n}}{s_n} \right| = 1 - \frac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - s_n^2}}} < k < \frac{1}{2} \text{ also: } \lim_{n\to\infty}(s_n) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{s_{2n}}{s_n}\right) = \frac{1}{2}$$

Der Beweis zu 3. sollte leistungsstarke Schüler auch nicht überfordern – so viel Termumformung ist m.E. zumutbar. Hier ist ein Weg skizziert, bei dem Überlegungen zur Approximation von Wurzeltermen $\sqrt{a^2 - x^2}$ u.a. auch zur l´Hospital-Regel hinführen können, mit deren Hilfe nachfolgender Grenzwert der Kontraktionsfaktoren $k_n := \left(\frac{\Delta\pi}{\pi}\right)_{2n} : \left(\frac{\Delta\pi}{\pi}\right)_n$ aber nicht weniger Termumformung erfordert.

Man beachte dabei: Wenn x << x^2<x^2/4, dann ist

$(1 - x/2)^2 = 1 - x + x^2/4 \approx 1 - x$ und $1 - x/2 \approx \sqrt{1-x}$, z.B. gilt $\sqrt{4-s^2} \approx 2 - \frac{1}{4}s^2$.

Mit $x := \sqrt{2+\sqrt{4-s_n^{\ 2}}}$ und Gleichung (4) in Abschnitt 1 gilt:

(5) $\pi_n := n\frac{s_n}{2}, \quad \pi_{2n} := 2n\frac{s_{2n}}{2} = n\frac{s_n}{x}$

(6) $\left(\frac{\Delta\pi}{\pi}\right)_n := \frac{\pi_{2n}-\pi_n}{\pi_n} = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{4-s_n^{\ 2}}}} - 1 = \frac{2}{x} - 1 = \frac{2-x}{x}$

Mit der linearen Näherung $\sqrt{4-s_n^{\ 2}} \approx 2 - \frac{1}{4}s_n^{\ 2}$ folgt

(7) $x = \sqrt{2+\sqrt{4-s_n^{\ 2}}} \approx \sqrt{2+(2-\frac{1}{4}s_n^{\ 2})} \approx (2 - \frac{1}{16}s_n^{\ 2})$

Mit (6) ergibt sich daraus

(8) $\left(\frac{\Delta\pi}{\pi}\right)_n \approx \frac{\frac{1}{16}s_n^{\ 2}}{2-\frac{1}{16}s_n^{\ 2}} \approx \frac{1}{32}s_n^{\ 2}$. Analog zu (6) und (8) gilt

(9) $\left(\frac{\Delta\pi}{\pi}\right)_{2n} = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{4-s_{2n}^{\ 2}}}} - 1 \approx \frac{1}{32}s_{2n}^{\ 2}$ mit der s_{2n}-Näherung gilt

(9a) $\left(\frac{\Delta\pi}{\pi}\right)_{2n} \approx \frac{1}{32}\frac{s_n^{\ 2}}{2+\sqrt{4-s_n^{\ 2}}} \approx \frac{1}{32}\frac{s_n^{\ 2}}{2+(2-\frac{1}{4}s_n^{\ 2})} \approx \frac{1}{32}\frac{s_n^{\ 2}}{4}$

Damit erfüllt der Kontraktionsfaktor für „kleine" s_n-Werte die Bedingung

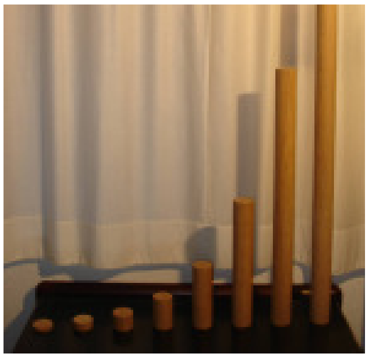
$k_n := \left(\frac{\Delta\pi}{\pi}\right)_{2n} : \left(\frac{\Delta\pi}{\pi}\right)_n \approx \frac{1}{4}$, woraus sich ergibt $\lim_{n\to\infty}(k_n) = \frac{1}{4}$.

3 e im Mathematikunterricht

Logarithmen spielten im 16. bis 17. Jh. eine große Rolle für numerisches Rechnen, weil man damit die Multiplikation von positiven Zahlen auf die Addition ihrer Logarithmen zurückführen kann. Die lästige Rechenlast nimmt uns heute der Taschenrechner ab. Mit der „natürlichen" Logarithmusfunktion konnte schließlich die

Lücke bei der Integration $\int x^n dx$ für n = -1 geschlossen werden. Dies war (zu) lange die Basis für den „Kleinschen Weg“ von ln(x) zur e-Funktion im MU des Gymnasiums. Euler [Euler (1983), Teil 1., 7. Kapitel] war der erste, der genial zu „seiner“ Zahl e hinführte und über die Umkehrung von e^x die Logarithmusfunktion ln(x) definierte. Ausgangspunkte sind in der Sekundarstufe I Wachstumsprozesse - z.B. Schachbrettgeschichte, Seerosenwachstum, Zu- oder Abnahmen von Populationen, radioaktiver Zerfall - bei denen sich eine „Größe“ pro „Zeittakt“ immer um die gleiche (Prozent-)Rate p %, d.h. mit dem Faktor b : = 1 + p/100 ändert.

Den Eulerschen Weg zu e und e^x kann man mit „Hand und Verstand“ nachgehen. Dazu empfehlen sich „2^{hoch}-Stäbe“ (aus Rundholz, ca. 5 cm Durchmesser, für die 2er-Potenzen), die in gleichmäßigen Abständen aufgestellt die Funktion f(x) = 2^n für natürliche Exponenten n „be-greifbar“ machen. Nun sucht man passende „Höhen“ für Plätze auf halbem, drittel, … 1/m–tel Weg von einem Stab zum nächsten.



Die Formalisierungen hiervon sind n-te Wurzeln, deren ganzzahlige Potenzen und die Schreibweise $2^{n/m}$. Das „Einpassen“ von Stäben gegebener Höhe, so dass alle Stabenden „augenscheinlich“ auf einer „glatten“ Kurve liegen, führt zu den Logarithmen-Werten der Stabhöhen. Schließlich verändert man die (äquidistanten) Abstände zwischen den Stäben und „begreift“, dass alle Exponential-Funktionen f(x) = b^x mit beliebiger Basis b>1 (oder 0<b<1) zueinander affin sind, d.h. $b^x = 2^{kx}$ mit „passendem“ k.

3.1 e – die besondere Basis

Euler überlegte sinngemäß (schon vor 1748): Wenn b als reelle Zahl existiert mit der Eigenschaft, dass der Graph von b^x in (0|1) linear mit dem „einfachsten“ Steigungsmaß t = 1 ansteigt, dann gilt für „kleine“ x-Beträge:

$b^x \approx 1 + x$ mit x := $\frac{1}{\pm n} \Rightarrow \quad b \approx (1+\frac{1}{n})^n$ und $b \approx (1-\frac{1}{n})^{-n} = (1+\frac{1}{n-1})^n$. Das ist der Zugang zu

(10) $e := \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n-1})^n$ und zu Näherungswerten dieser Euler-Zahl, z.B. **<u>2,718</u>**4…= $(0{,}9999)^{-10000}$ **< e <** $1{,}0001^{10000}$ = **<u>2,718</u>**1…
Mit der Binom-Formel folgt:

$$(1+\frac{1}{n})^n = 1+1+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\binom{n}{3}\frac{1}{n^3}+\ldots+\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}+\ldots$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}\ldots+\ldots.\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{k-1}{n})+\ldots$$

Damit kann „vermutet“ und später – vgl. [Kneser (2004)] - bewiesen werden, dass die unendliche Summe konvergiert und e viel schneller als mit (10) berechnet werden kann: (11) $1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\ldots.+\frac{1}{k!}+\ldots = e$

Die aus der Definition (10) von e folgende Eigenschaft, dass wiederholte Ableitungen von e^x wieder e^x ergeben, wird im MU m.E. zu selten zur Approximtion von e^x durch ein (Taylor-)Polynom in x genutzt.

Mit $e^x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots\ a_kx^k + \ldots.$ und $1 = (e^x)^{(k)}{}_{x=0} = k!a_k$ für alle natürliche Zahlen k gilt: $a_k = \frac{1}{k!}$ und damit $e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$, insbesondere: $e = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$

Damit ist im Sonderfall x = 1 auch der Nachweis von (11) nachgeliefert.

Die Definition des Logarithmus ln (x) ergibt sich auf diesem „genetischen Weg“, der seinen Anfang bei Potenzen b^x hatte und heuristischen Überlegungen von Euler folgte, nun als Umkehrfunktion der streng monotonen Funktion e^x.

In [Kneser (2004)] wird diese für Euler typische heuristische Denkweise, bei der über die Existenz der reellen Zahl e nicht weiter reflektiert wird, aufgegriffen. Martin Kneser zeigt, wie man in einer Vorlesung für Studienanfänger die Funktion f(x) konstruiert, welche folgende Eigenschaften hat:

(a) f(x+y) = f(x)f(y) für alle reellen Zahlen x und y und

(b) $\lim_{x\to 0}(\frac{f(x)-1}{x}) = c$ für eine gegebene reelle Zahl c.

3.2 Ein Algorithmus zur Approximation von e^x - Werten

Als algorithmen-orientierte Vertiefung im Mathematikunterricht sei ein**e** Methode zur Berechnung von e^x und ln (x) empfohlen. Die motivierende Frage hierzu könnte lauten: „Wie berechnet ein Taschenrechner solche Funktionswerte?". Mit der Beziehung $e^x = (e^{x/2})^2$ ergibt sich dieses „Deflations-Inflations-Verfahren":

1. Der x-Wert wird n-mal halbiert bis $x : 2^n =: x_n$ „sehr klein" ist,
2. mit x_n wird die „quadratische" Näherung berechnet $1 + x_n + ½\,(x_n)^2 =: y_n$,
3. dieser Wert y_n wird n-mal quadriert und man erhält den Näherungswert für e^x.

Beispiel für x = 1; e^1 = **2.71** 82 81 82 84 59 04 52 35 36 02 87 47 13 52 66 24 …

Zunächst 1 : 2 : 2 : 2 = 0,125, dann 1 + 0,125 + ½ $(0{,}125)^2$ = 1,13 28 125 und schließlich $(((1{,}13\,28\,125)^2)^2)^2$ = **2,71** 18 …

Der „Umkehrweg" führt vom 3. Schritt für einen gegebenen Wert $y := e^x$ über n-maliges Quadratwurzelziehen zu y_n im 2. Schritt. Hier wird die (positive) Wurzel x_n der quadratischen Gleichung $1 + x + ½\,(x)^2 =: y_n$ berechnet und diese n-mal verdoppelt: $2^n x_n \approx \ln(y)$.

3.3 Welche Zahlen sind π und e?

Der Nachweis der Transzendenz von e – z.B. nach Charles Hermite (1822-1901; Beweis in 1873) - ist sicherlich nicht Stoff des MU sondern eines Mathematikstudiums. Ebenso die Irrationalität und Transzendenz von π - Lambert (1761): π ist irrational; Lindemann (1882): π ist transzendent.

Die Irrationalität von e, die Euler 1737 bewies, kann aber leistungsstarken Schülern so vermittelt werden: Die Annahme e = p/q mit q > 1 führt zum Widerspruch:

(11) $0 < (\frac{p}{q} - \sum_{k=o}^{q} \frac{1}{k!}) \cdot q! = (\sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{k!}) \cdot q! < 1$. Damit dieser Beweistrick nicht „vom Himmel fällt", sind folgende heuristische, zielführende Fragen angemessen:

Wie klein könnte die Differenz zwischen einer rationalen Zahl p/q (= e) und der endlichen Summe $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ sein? Wie kann ich Bruchterme vermeiden?

Um alle Brüche zu vermeiden, bietet sich n = q im Term $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ an und die anschließende Multiplikation mit q!. Links vom Gleichheitszeichen in (11) steht nun offensichtlich eine natürliche Zahl. Die unendliche Summe rechts von „=“ lässt sich durch eine geometrische Reihe nach oben abschätzen. Anfangsglied und Quotient der Reihe sind beide 1/(q+1), der Summenwert ist 1/q < 1. Hier ist der Widerspruch: Es wurde unter der Annahme, dass e rational ist, eine natürliche Zahl konstruiert, die kleiner als 1 ist.

In den folgenden Aufgaben seien abschließend einige „Merkwürdigkeiten“ (z.T. aus [Maor (1996)]) zu π und e zitiert, die im MU ihren Platz finden könnten:

π = 3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974 …

e = 2.718281828459045235360287471352662497757247093699959574966 …

- Bestimme 3 (10 bzw. 20) „gültige“ (genaue) Dezimalziffern von …
  π + e und π · e, (nicht bekannt, ob algebraisch oder transzendent),
  π^e und e^e (unbewiesen ob algebraisch),
  e^π (A.O. Gel´fond, 1934 Transzendenzbeweis),
  $e^{1/e}$ (Maximalwert der Jakob-Steiner-Funktion $y = x^{1/x}$).
- Schätze mit einer 10er-Potenz die Größenordnung ab:

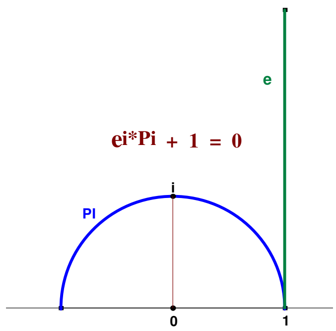
  e^{e^e}, $e^{e^{e^e}}$, $e^{e^{e^{e^e}}}$ …

3.4 Eine heuristische Betrachtung zu $e^{i\pi}+1=0$

Überrascht und fasziniert ist seit Euler (fast) jeder an Mathematik Interessierte, wenn er den Zusammenhang zwischen den Zahlen 0 und 1, die wir als Basis unseres Zählens erfahren, mit e, π und der imaginären Zahl i := $\sqrt{-1}$ in der Gleichung $e^{i\pi}+1=0$ erfährt.

Ein anschaulicher „Beweis“, in dem wir ganz naiv (wie in einem Eulerschen Paradies, aus dem uns nicht so schnell einer vertreiben möge) rechnen, sollte interessierten Schülern und Lehramtskandidaten nicht vorenthalten werden.

Die komplexe Zahl z auf dem Einheitskreis schreiben wir wie Gauß uns empfiehlt so:
$z = \cos\alpha + i \sin\alpha = (1 + i \tan\alpha) \cos\alpha$.
Wenn n „sehr groß“, dann ist $\alpha := \pi / n$ sehr klein und $\tan\alpha \approx \alpha$ und $\cos\alpha \approx 1$.



Hat man erfahren und mit den Additiostheoremen für sin- und cos-Funktion bewiesen, dass $(\cos\alpha + i \sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$ ist, dann deutet man die Multiplikation von komplexen Zahlen als Drehstreckung und erkennt:

$z^n = [(1 + i \tan\alpha) \cos\alpha]^n \approx [1 + i\alpha]^n = [1 + i\ \pi / n]^n$

Den letzten Term formt man unter Beibehaltung der Rechenregeln für reelle Zahlen (Permanenzprinzip) so um: $\{[1 + 1/(n/i\pi)]^{n/i\pi}\}^{i\pi}$. Es ist sicher gewagt, zu behaupten, dass $[1 + 1/(n/i\pi)]^{n/i\pi}$ für sehr große n und damit für sehr große $n/i\pi$ sich kaum mehr von e unterscheidet. Die Definition

$e := \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ ermutigt aber dazu und damit zur „Einsicht“ $\lim_{n\to\infty} z^n = e^{i\pi}$.

Andererseits ist mit $\alpha := \pi / n$ für jede natürliche Zahl n

$z^n = (\cos \pi/n + i \sin \pi/n)^n = \cos(n\,\pi/n) + i \sin(n\,\pi/n) = \cos\pi + i \sin\pi = -1$.

Aus diesen heuristischen Betrachtungen mit „Fastgleichem“ im Eulerschen Sinne folgt $z^n = -1$ und auch $\lim_{n\to\infty} z^n = e^{i\pi}$

Es sei hier noch mal deutlich gesagt, dass dies kein Beweis für $e^{i\pi} + 1 = 0$ ist. Die heuristischen Argumente sind vielmehr ein motivierender Anlass zur Erweiterung der reellen Analysis auf den Körper der komplexen Zahlen, mit dem dann die Beweise gelingen.

Enden möchte ich mit einem Zitat aus [Maor (1996)] von Benjamin Peirce (Mathematiker, Harvard, 19 Jh): „*Die Formel* $e^{i\pi} + 1 = 0$ *ist gewiß absolut paradox; wir können sie nicht verstehen und wir wissen nicht, was sie bedeutet. Aber wir haben sie bewiesen und wissen daher, dass sie wahr ist*“.

Literatur

BECKMANN, PETR (1971): *A History of π*, St. Martin´s, New York.

EULER, LEONARD (1983): *Introductio in Analysin Infinitorum* (Reprint Teil 1.), Bousquet, Lausanne, 1748 ; Springer-Verlag, Berlin 1885. Deutsche Übersetzung: Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.

MAOR, ELI (1996):*Die Zahl e – Geschichte und Geschichten*, Birkhäuser, Basel.

KNESER, MARTIN (2004): *Ein etwas anderer Zugang zur Exponentialfunktion*; Math. Semesterberichte 51, S. 225-229, (mit Einarbeitungen von historischen Bemerkungen durch R. Remmert).

BLANKENAGEL, JÜRGEN (1988): Ü*berlegungen zur Brauchbarkeit dreier Rekursionsformeln für die Pi-Berechnung nach Archimedes.* Didakt. Math. v. 16(2) S.128-135.

POSAMENTIER, ALFRED & LEHMANN, INGMAR (2004): *A Biography of the World´s Most Mysterious Number*; Prometheus Books, New York.

SCHRÖDER, MAX WURL, BERND & WYNANDS, ALEXANDER (2007): *Schulbücher Maßstab/Faktor 9. Klasse für Haupt- und Realschulen*, Schroedel-Verlag, Braunschweig.

Anschrift des Verfassers
Prof. Dr. Alexander Wynands
Mathematisches Institut, Uni. Bonn
Marienstraße 22a
53639 Königswinter

E-Mail: wynands@math.uni-bonn.de